



TITLE:

# Cuspidal automorphic representation に関する Garrett の triple L-function の関数等式について(保型形式とその周辺)

AUTHOR(S):

池田, 保

---

CITATION:

池田, 保. Cuspidal automorphic representation に関する Garrett の triple L-function の関数等式について(保型形式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1987, 617: 103-113

ISSUE DATE:

1987-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99846>

RIGHT:

Cuspidal automorphic representation に関する  
Garrett の triple L-function の関数等式について

京大理 池田 保

(Tamotsu Ikeda)

P. B. Garrett [1], [2] は総実代数体上の weight の等しい 'new form' の3つ組に関する triple L-function の解析接続と関数等式を与えた。本稿では彼の結果を拡張し、 $GL_2$  の任意の cuspidal automorphic representation の3つ組に関する triple L-function の解析接続と関数等式を与える。詳しくは現在準備中の論文を参照していただきたい。

§1. 代数的準備

$k$  を体とする。 $k$  上定義された次のような代数群を考える。

$$H = GSp_3, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H : C = 0_3 \right\}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_3 & D \end{pmatrix} \in P : A = D = \mathbb{1}_3 \right\}$$

$$G = \{ (g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}) \in (GL_2)^3 : \det g^{(1)} = \det g^{(2)} = \det g^{(3)} \}$$

$Z$  を  $G$  の center における単位元の連結成分とする。  $G$  の  $H$  へのうめこみ  $z$  を

$$z \left( \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ & a_3 & & b_3 \\ \hline c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ & c_3 & & d_3 \end{array} \right).$$

と定義する。

$P$  の rational character  $\chi_0, \chi_1$  を

$$\chi_0 \left( \begin{pmatrix} mA & * \\ 0_3 & A^{-1} \end{pmatrix} \right) = m, \quad \chi_1 \left( \begin{pmatrix} mA & * \\ 0_3 & A^{-1} \end{pmatrix} \right) = \det A.$$

と定義する。  $P$  の modulus character  $\delta$  は  $\chi_0^6 \chi_1^4$  で与えられる。

## § 2. Eisenstein series.

$k$  を global field とする。  $k$  の各素点  $v$  に対して、  $H_v$  の極大 compact 部分群  $K_v$  を

$v$  が non-archimedean の時、  $K_v = GSp_3(\mathcal{O}_v)$ .

$v$  が real の時、  $K_v = GSp_3(\mathbb{R}) \cap O_6$ .

$v$  が complex の時.  $K_v = \mathrm{GSp}_3(\mathbb{C}) \cap U_v$   
 と定義する.  $K = \prod_v K_v$  とおく. この時.  $H_v = P_v K_v$ ,  $H(A) = P(A)K$ . がなりたつ.

$\omega$  を  $A^\times/k^\times$  の任意の quasi-character とする時.  $I(\omega, \lambda)$  を.  $H(A)$  上の  $\mathbb{C}$ -valued function  $f$  で次の 1), 2) を満たすもののなすベクトル空間とする.

1)  $f$  は右  $K$  有限.

2) 任意の  $p \in P(A)$  に対して

$$f(ph) = \omega(\chi_0 \chi_1(p)) |\delta(p)|_A^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}} f(h).$$

また.  $\tilde{I}(\omega, \lambda)$  を 1),  $\tilde{2}$ ) をみたすもののなすベクトル空間とする.

$\tilde{2}$ ) 任意の  $p \in P(A)$  に対して

$$f(ph) = \omega(\chi_0^{-2} \chi_1^{-1}(p)) |\delta(p)|_A^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}} f(h).$$

$k$  の各素点  $v$  に対して. 上の定義において  $A^\times/k^\times$ ,  $\omega$ ,  $H(A)$ ,  $P(A)$ ,  $K$  をそれぞれ  $k_v^\times$ ,  $\omega_v$ ,  $H_v$ ,  $P_v$ ,  $K_v$  でおきかえて得られるものを  $I(\omega_v, \lambda)_v$ ,  $\tilde{I}(\omega_v, \lambda)_v$  とする. この時.

$$I(\omega, \lambda) = \bigotimes'_v I(\omega_v, \lambda)_v, \quad \tilde{I}(\omega, \lambda) = \bigotimes'_v \tilde{I}(\omega_v, \lambda)_v$$

がなりたつ.

$C(K, \omega)$  を  $K$  上の右有限な  $\mathbb{C}$ -valued function  $f$  で、任意の  $p \in P(A) \cap K$  に対して

$$f(pk) = \omega(\chi_0 \chi_1(p)) f(k)$$

をみたすもののなすベクトル空間とすると、 $K$  への制限により、 $I(\omega, \mathfrak{A}) \simeq C(K, \omega)$ .  $\tilde{C}(K, \omega)$  も同様に定義すれば、 $\tilde{I}(\omega, \mathfrak{A}) \simeq \tilde{C}(K, \omega)$ .

$I_{w_3} : I(\omega, \mathfrak{A}) \longrightarrow \tilde{I}(\omega, 1-\mathfrak{A})$  を次のように定義する。  $f \in I(\omega, \mathfrak{A})$  に対して、

$$I_{w_3} f(k) = \int_{U(A)} f(w_3 u k) du.$$

ただし、 $w_3 = \begin{pmatrix} O_3 & I_3 \\ -I_3 & O_3 \end{pmatrix}$ .  $U(A)$  の Haar measure  $du$  は  $\text{Vol}(U(A)/U(K)) = 1$ . となるよう定める。

この積分は  $\text{Re } \mathfrak{A} \gg 0$  の時、絶対収束し、 $I_{w_3}$  は  $C(K, \omega) \rightarrow \tilde{C}(K, \omega)$  という operator とみて全  $\mathfrak{A}$ -平面に解析接続できる。

また、 $k$  の各素点  $v$  に対して  $I_{w_3, v}$  を同様の積分で定義すれば、 $I_{w_3} = \bigotimes_v I_{w_3, v}$  がなりたつようにできる。

$f \in I(\omega, \mathfrak{A})$  または  $f \in \tilde{I}(\omega, \mathfrak{A})$  の時、Eisenstein series  $E(k; f)$  は  $\text{Re } \mathfrak{A} \gg 0$  の時、絶対収束する級数

$$E(k; f) = \sum_{r \in P(k) \setminus H(k)} f(rk).$$

で定義され、全  $\mathcal{A}$ -平面に解析接続される。また次の関数等式がなりたつ。

$$f \in I(\omega, \mathcal{A}) \text{ に対して, } E(k; I_{\omega, \mathcal{A}} f) = E(k; f).$$

### § 3. Rankin-Selberg convolutions

$k$  を global field,  $\pi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) を  $GL_2(\mathcal{A})$  の cuspidal automorphic representation,  $\varphi_i$  を  $\pi_i$  に属する cusp form,  $\omega_i$  を  $\pi_i$  の central quasi-character,  $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3$  とする。

$\mathcal{A}/k$  の additive character  $\psi$  を固定する。  $\pi_i$  の  $\psi$  に関する Whittaker model を  $\mathcal{W}(\pi_i, \psi)$  とする。

$\varphi_i$  はある  $W_i \in \mathcal{W}(\pi_i, \psi)$  を用いて

$$\varphi_i(g) = \sum_{\alpha \in k^\times} W_i \left( \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right).$$

と展開される。

$f \in I(\omega, \mathcal{A})$  または  $f \in \tilde{I}(\omega, \mathcal{A})$  に対して Rankin-Selberg 型の積分

$$\int_{Z(A)G(\mathbb{R}) \backslash G(A)} E(z(g); f) \prod_{i=1}^3 \varphi_i(g^{(i)}) dg \quad (2.1)$$

を考える。

Lemma. 1.  $P(\mathbb{R}) \backslash H(\mathbb{R}) / z(G(\mathbb{R}))$  の完全代表系として次の5個がとれる。

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \right), & \eta_1 &= \left( \begin{array}{cc|c} 1 & & -1 \\ & 1 & \\ \hline & 1 & -1 \end{array} \right), \\ \eta_2 &= \left( \begin{array}{cc|c} & & -1 \\ & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \end{array} \right), & \eta_3 &= \left( \begin{array}{cc|c} & 1 & -1 \\ & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \end{array} \right), & \eta_4 &= \mathbb{I}_6. \end{aligned}$$

$R_j = z^{-1}(\eta_j^{-1} P \eta_j)$ ,  $(0 \leq j \leq 4)$ . とおけば,  $j=1, 2, 3, 4$  の時,  $R_j$  は  $G$  のある proper parabolic subgroup の unipotent radical を正規部分群にもつ.

この Lemma により,  $\operatorname{Re} s \gg 0$  ならば,

$$(2.1) = \int_{Z(A)N_0(A) \backslash G(A)} f(\eta_0 z(g)) \prod_{i=1}^3 W_i(g^{(i)}) dg$$

がなりたつことが証明できる。ここで,

$$N_0 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & m_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in G; m_1 + m_2 + m_3 = 0 \right\}.$$

$f = \prod_v f_v$ ,  $W_i = \prod_v W_{i,v}$  であれば, この積分は次の無限積に等しい.

$$\prod_v \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} f_v(\gamma_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

$v$  が non-archimedean で,  $\pi_{i,v}$  がすべて class 1 の時,  $\varpi_v \in k_v^*$  の素元,  $q_v$  を剰余体の位数とし,  $f_v \in I(\omega_v, \mathbf{1})_v$ ,  $W_{i,v} \in W(\pi_{i,v}, \psi)$  を  $f_v|_{K_v} \equiv 1$ ,  $W_{i,v}|_{GL_2(O_v)} \equiv 1$  とする時,

$$\int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} f_v(\gamma_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v$$

$$= (1 - \omega_v(\varpi_v) q_v^{-2d-1}) (1 - \omega_v^2(\varpi_v) q_v^{-4d}) L(\mathbf{1}, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)_v$$

ここで,  $L(\mathbf{1}, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)_v$  は,  $\pi_{i,v} = \pi(\mu_i, \nu_i)$ ,  $\mu_i, \nu_i$  は  $k_v^*$  の unramified character とする時,

$$\underbrace{(1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3(\varpi_v) q_v^{-d})^{-1} \cdots (1 - \nu_1 \nu_2 \nu_3(\varpi_v) q_v^{-d})^{-1}}_{8 \text{ 個}}$$

で与えられる.

注意. Garrett は同様の結果を  $GL_2(k)$  の cusp form  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  に対してだけでなく, 次の場合にも得ている.



- 1)  $GL_2(F)$  の cusp form  $\varphi_1$  と  $GL_2(k)$  の cusp form  $\varphi_2$ .  
 ここで  $F$  は  $k$  の総実な 2 次拡大.
- 2)  $GL_2(K)$  の cusp form  $\varphi_1$ . ここで  $K$  は  $k$  の総実な 3 次拡大.

#### § 4. 主定理.

$k_v$  を local field,  $\psi_v$  を  $k_v$  の additive character,  $\pi_{i,v}$  ( $i=1,2,3$ ) を  $GL_2(k_v)$  の既約な admissible representation, とする.

$f_v \in I(\omega_v, \lambda)_v$ ,  $W_{i,v} \in \mathcal{W}(\pi_{i,v}, \psi_v)$  に対して

$$\Psi_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) = \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} f_v(\eta_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

$$\tilde{\Psi}_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) = \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} I_{W_{3,v}} f_v(\eta_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

と定義する.

定理 1.  $\Psi_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})$ ,  $\tilde{\Psi}_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})$  は  $C(k_v, \omega_v) \times \prod_{i=1}^3 \mathcal{W}(\pi_{i,v}, \psi_v)$  の上の 4 重線型形式として全  $\lambda$ -平面に meromorphic に解析接続される。  $\pi_{1,v}$ ,  $\pi_{2,v}$ ,  $\pi_{3,v}$ ,  $\psi_v$  のみに依存する  $\lambda$  の有理型関数  $\mathcal{E}(\lambda, \pi_{1,v}, \pi_{2,v}, \pi_{3,v}, \psi_v)$  があって

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_A(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) &= \varepsilon'(2A-2, \omega_v, \psi_v)^{-1} \varepsilon'(4A-3, \omega_v^2, \psi_v)^{-1} \\ &\times \varepsilon'(A, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) \\ &\times \Psi_A(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})\end{aligned}$$

かなりたつ.

ここで 右辺の最初の2つの  $\varepsilon'$  は  $k_v^*$  の quasi-character に対する  $\varepsilon'$  因子で,  $\chi$  を  $k_v^*$  の quasi-character とする時,  $k_v$  上の任意の Schwartz-Bruhat function  $\Phi$  に対して

$$\int_{k_v^*} \widehat{\Phi}(x) \chi^{-1}(x) |x|_v^{1-A} d^*x = \varepsilon'(A, \chi, \psi_v) \int_{k_v^*} \Phi(x) \chi(x) |x|_v^A d^*x.$$

かなりたつものとして定義される。ただし,  $\widehat{\Phi}$  は  $\Phi$  の  $\psi_v$  に関する Fourier 変換.

定理2.  $k_v^*$  の quasi-character  $\mu_v, \nu_v$  があって,  $\pi_{1,v}$  が  $\pi(\mu_v, \nu_v)$  の subquotient になっている時.

$$\begin{aligned}\varepsilon'(A, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) &= \varepsilon'(A, (\mu_v \otimes \pi_{2,v}) \times \pi_{3,v}, \psi_v) \\ &\times \varepsilon'(A, (\nu_v \otimes \pi_{2,v}) \times \pi_{3,v}, \psi_v).\end{aligned}$$

かなりたつ. ここで右辺の  $\varepsilon'$  は Jacquet [3] の定義した  $GL_2$

$\times GL_2$  の  $\varepsilon'$  因子。

$k$  を global field,  $\pi_i$  を  $GL_2(A)$  の既約な cuspidal automorphic representation とする。

$k$  の素点の有限集合  $S$  を

- 1)  $S$  は archimedean place をすべて含む。
- 2)  $v \notin S$  ならば,  $\pi_{i,v}$  は class 1.
- 3)  $v \notin S$  ならば,  $\psi_v$  は order 0.

が満たされるように定める。

$$L_S(\lambda, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3) = \prod_{v \notin S} L(\lambda, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)_v \text{ と定義する。}$$

$\pi_i$  の contragredient representation を  $\tilde{\pi}_i$  とする。

定理3.  $L_S(\lambda, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)$  は全  $\lambda$ -平面に有理型関数として解析接続され, 次の関数等式をみたす。

$$\begin{aligned} & L_S(1-\lambda, \tilde{\pi}_1 \times \tilde{\pi}_2 \times \tilde{\pi}_3) \prod_{v \in S} \varepsilon'(\lambda, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) \\ &= L_S(\lambda, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3). \end{aligned}$$

例  $k_v = \mathbb{R}$ .  $\psi_v(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ .  $\pi_{i,v}$  を weight  $k_i$  の holomorphic cusp form から生成される automorphic rep

resentation の  $\mathbb{R}$ -component とすると.

$$\xi(s, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) = (-1)^{k_1+k_2+k_3+1} (2\pi)^{8s-8-4(k_1+k_2+k_3)}$$

$$\times \frac{\Gamma(k_1+k_2+k_3-2-s) \Gamma(k_2+k_3-1-s) \Gamma(k_1+k_3-1-s) \Gamma(k_1+k_2-1-s)}{\Gamma(s) \Gamma(s+1-k_1) \Gamma(s+1-k_2) \Gamma(s+1-k_3)}.$$

### References.

1. P. B. Garrett, Decomposition of Eisenstein series; Rankin triple products, Univ. of Minnesota Math. Report.
2. ———, Integral representation of certain L-functions, attached to one, two, and three modular forms, to appear.
3. H. Jacquet, Automorphic forms on  $GL_2$ . II, LN 278
4. R. P. Langlands, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, LN 544.
5. I. I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, L-functions for classical groups, to appear.
6. T. Satoh, Some remarks on special values of triple L-functions, to appear.
7. T. Ikeda, in preparation.